Stima dell'incertezza di misura secondo il modello statistico

Consideriamo una misura di tipo indiretto, ossia una misura di una grandezza Y ottenuta in funzione delle misure di altre grandezze misurabili $X_1,X_2,...,X_N$:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \qquad (1)$$

La grandezza d'uscita Y, quindi, dipenderà da N grandezze d'ingresso ognuna descritta dall'opportuna distribuzione di probabilità.

Vogliamo calcolare l'incertezza di misura associata a Y, secondo il modello statistico di incertezza, note le incertezze tipo delle grandezze d'ingresso. Tale modello è quello descritto nella norma UNI CEI ENV 13005 "Guida all'espressione dell'incertezza di misura" del 31/7/2000, che è la versione ufficiale in lingua italiana della norma europea sperimentale ENV 13005 "Guide to the expression of uncertainty in measurement" emanata nel 1999 ed approvata e riconosciuta dal CPIM (Comité International des Poides and Mesures). Il modello descritto nella norma UNI CEI ENV 13005 è basato su un approccio di tipo probabilistico, in quanto la grandezza misurata è trattata come una variabile aleatoria (v.a.) a cui è associata un'opportuna funzione densità di probabilità. Il valore assegnato al misurando è una stima del valore atteso della sua funzione densità di probabilità, che è assunto coincidente con la media aritmetica delle k osservazioni della v.a.. Gli scostamenti delle singole osservazioni del misurando dal suo valor medio sono descritti dalla deviazione standard della funzione densità di probabilità associata alla v.a., detta incertezza tipo.

Lo sviluppo di f in serie di Taylor intorno ai valori attesi[1] delle X_i, $E[X_i]=\mu_i$, troncato al prim'ordine, fornisce, per piccoli scostamenti di y intorno al suo valore atteso μ_y in funzione di piccoli scostamenti delle X_i intorno alle μ_i:

$$Y - \mu_y = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_i - \mu_i) \qquad (2)$$

[1] $E[X] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$, dove k è il numero di osservazioni della v.a. X.

in cui si considerano trascurabili i termini di ordine superiore[2] e in cui $\mu_y=f(\mu_1, \mu_2,...,\mu_N)$. Il quadrato dello scostamento $Y-\mu_y$ sarà allora dato da:

$$(Y-\mu_y)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}(X_i-\mu_i)\right)^2 \tag{3}$$

che può essere scritta:

$$(Y-\mu_y)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2(X_i-\mu_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j) \tag{4}$$

Applichiamo l'operatore valore atteso ad ambo i membri:

$$E\left[(Y-\mu_y)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2(X_i-\mu_i)^2\right] + E\left[2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\right] \tag{5}$$

considerando le proprietà di linearità dell'operatore valore[3] atteso possiamo scrivere:

$$E\left[(Y-\mu_y)^2\right] = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 E\left[(X_i-\mu_i)^2\right] + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}E\left[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\right] \tag{6}$$

Il valore atteso del quadrato dello scostamento $Y-\mu_y$ è la varianza di Y, $E[(Y-\mu_y)^2]=\sigma_y^2$. Il valore atteso del quadrato dello scostamento $X_i-\mu_i$ è la varianza di X_i, $E[(X_i-\mu_i)^2]=\sigma_i^2$. Considerando un fattore di copertuta unitario la varianze coincideranno con il quadrato delle incertezze tipo, ovvero $\sigma_y^2= u_c(Y)^2$ e $\sigma_i^2= u(X_i)^2$.

---

[2] La f deve essere lineare o deve essere caratterizzata da una nonlinearità non significativa, quando la non linearità di f è significativa, si devono includere nell'equazione (2), anche termini di ordine superiore.

[3] Se X è una variabile aleatoria con E[X] finito e $a, b \in R$:

$$E[aX+b] = aE[X]+b$$

Se $X_1, X_2,...,X_N$ sono variabili aleatorie con valore atteso finito:

$$E[(X_1+X_2+\ldots+X_N)] = E[X_1]+E[X_2]+\ldots+E[X_N]$$

Il valore atteso al secondo termine del secondo membro della (6) è la covarianza[4] di X_i e X_j, Cov(X_i, X_j). Si tratta di una grandezza che esprime il grado di dipendenza statistica tra le stime delle due grandezze. La covarianza è in pratica considerata un indice della tendenza delle variabili, nel nostro caso X_i e X_j, a "variare assieme", per esempio X_j cresce se X_i cresce (Cov(X_i, X_j)>0), o descresce (Cov(X_i, X_j)<0). Se le variabili X_i e X_j sono statisticamente indipendenti allora Cov(X_i , X_j)=0 e le variabili si dicono scorrelate.

Indichiamo con u(X_i, X_j) la covarianza tra le grandezze X_i e X_j, (u(X_i, X_j)= Cov (X_i , X_j)), la (6) può essere riscritta come:

$$u_c(Y)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u(X_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}u(X_i, X_j) \tag{7}$$

La dipendenza statistica tra due variabili aleatorie, nel nostro caso X_i e X_j, è solitamente espressa mediante un parametro adimensionale detto coefficiente di correlazione, che è ottenuto come:

$$r(X_i, X_j) = \frac{u(X_i, X_j)}{u(X_i)u(X_j)} \tag{8}$$

Il coefficiente di correlazione assume valori compresi tra -1 e +1 e vale zero se le stime delle due grandezze sono statisticamente indipendenti. Questo coefficiente al contrario della covarianza è indipendente dalla scala utilizzata per misurare i valori delle variabili aleatorie.

Esprimiamo la (7) in termini di coefficiente di correlazione attraverso la (8), otteremo:

$$u_c(Y)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u(X_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}r(X_i, X_j)u(X_i)u(X_j) \tag{9}$$

---

[4] Date due variabili aleatorie X e Y con varianza finita la covarianza è definita come:
$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
Alcune sue proprietà sono, date X e Y variabili aleatorie con varianza (σ^2) finita:

1. Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] E[Y];
2. Cov(X, X) = σ^2(X);
3. Cov(X, Y) =Cov(Y, X);
4. Se X e Y sono indipendenti Cov(X,Y)=0, non è vero il contrario.

L'incertezza tipo combinata $u_c(Y)$ della grandezza d'uscita Y ottenuta in funzione delle N grandezze d'ingresso X_i è la radice quadrata della varianza standard combinata $u_c(Y)^2$.
La (9) viene chiamata legge di propagazione dell'incertezza per grandezze correlate. Quando tutte le grandezze d'ingresso sono indipendenti, e quindi il coefficiente di correlazione assume valore nullo, il termine al secondo membro si annulla e la (9) diventa:

$$u_c(Y)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u(X_i)^2 \qquad (10)$$

La (10) è la legge di propagazione dell'incertezza per grandezze scorrelate.

Le derivate parziali che compaiono nella (9) e nella (10), chiamate coefficienti di sensibilità, descrivono come la stima d'uscita y varia al variare dei valori delle stime d'ingresso.
Possiamo riscrivere la (9) e la (10) come:

$$u_c(Y)^2 = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u(X_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j r(X_i, X_j) u(X_i) u(X_j) \qquad (11.1)$$

$$u_c(Y)^2 = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u(X_i)^2 \qquad (11.2)$$

dove:

$c_i = \frac{\partial f}{\partial X_i}$ valutate nei valori attesi delle X_i e $c_j = \frac{\partial f}{\partial X_j}$ valutate nei valori attesi delle X_j

A questo punto può essere interessante fare alcune considerazioni rispetto al metodo tradizionale di trattazione dell'incertezza (legge di propagazione degli errori) cui viene associato un modello deterministico, facente riferimento agli scarti massimi (errori assoluti) e la trattazione dell'incertezza attraverso il modello statistico (legge di propagazione dell'incertezza), che fa riferimento alle incertezze tipo.

L'espressione della legge di propagazione delle incertezze calcolate con il metodo deterministico è la seguente:

$$E_Y = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| E_i = \sum_{i=1}^{N} |c_i| E_i \tag{12}$$

La legge di propagazione delle incertezze calcolate con il metodo statistico è:

$$u_c(Y)^2 = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u(X_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j r(X_i, X_j) u(X_i) u(X_j) \tag{13}$$

Le due equazioni hanno aspetto simile differendo nel fatto che:

- Gli scarti massimi (errori assoluti) E_i sono sostituiti dalle incertezze tipo combinate $u(X_i)$;
- La sommatoria (lineare) dei valori assoluti è sostituita da una sommatoria quadratica;
- Nella (13) è presente un secondo addendo che non compare nella (12).

L'uso di sommatorie quadratiche in luogo delle sommatorie lineari (di moduli) ha almeno quattro implicazioni notevoli:

1. La sommatoria quadratica è sempre minore della sommatoria lineare quindi l'incertezza determinata per via statistica tende ad essere espressa da un numero inferiore (comunque la si valuti) a quello espresso nel caso di incertezza determinata nel metodo deterministico. La differenza diventa notevole quando le grandezze di ingresso sono molte mentre è meno significativa per misurazioni semplici.
2. La riduzione dell'incertezza valutata per via statistica rispetto a quella valutata per via deterministica corrisponde al fatto che statisticamente la possibilità che tutti i contributi di incertezza agiscano sul risultato con il massimo valore possibile e con lo stesso segno è estremamente remota.
3. Se davvero tutte le incertezze agissero sul risultato della misurazione nello stesso senso, saremmo in presenza di una evidente correlazione tra le grandezze stesse. Se tutte le correlazioni $r(X_i, X_j)$ fossero pari a +1 la (13) diventerebbe:

$$u_c(Y)^2 = \sum_{i=1}^{N}(c_i)^2 u(X_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(X_i) u(X_j) = \left(\sum_{i=1}^{N}(c_i) u(X_i)\right)^2 \qquad (14)$$

e dunque la formula impiegata per il calcolo dell'incertezza in forma deterministica coinciderebbe (almeno apparentemente) con quella usata per il calcolo in forma statistica. Si noti che permarrebbe comunque la differenza dovuta all'impiego degli scarti massimi in luogo delle incertezze tipo.

4. All'estremo opposto, non esistono, a stretto rigore, casi in cui la correlazione tra le grandezze d'ingresso sia rigorosamente nulla; al massimo, in casi in cui essa sia sufficientemente piccola, il suo contributo all'incertezza può essere trascurabile. Ciò deve, ovviamente, essere valutato di volta in volta ed una precisa valutazione quantitativa di validità generale non è possibile. Non esiste una regola generale per il calcolo del coefficiente di correlazione e/o della covarianza, occorre tenere conto di tutti i fenomeni fisici che entrano in gioco nella misura, confidando nell'esperienza e sensibilità dell'operatore. Nella maggior parte dei casi pratici, però è possibile dire che, in genere, solo un coefficiente di correlazione superiore al 10% -15% dà luogo ad effetti non trascurabili.

CONSIDERAZIONI SULLE VARIABILI ALEATORIE STATISTICAMENTE DIPENDENTI E INDIPENDENTI

Il grado di correlazione tra grandezze d'ingresso è originato dagli effetti di grandezze di comune influenza, come per esempio temperatura ambiente, pressione atmosferica ed umidità.

Si consideri il caso in cui le due variabili di ingresso siano funzione della temperatura. È evidente che l'incertezza delle variabili di ingresso dipenderà dall'incertezza con cui viene misurata la temperatura. Se la temperatura viene misurata con lo stesso strumento, questo rappresenta un elemento di correlazione.

Si consideri il caso in cui la frequenza di un oscillatore poco o nulla compensato per la temperatura sia una grandezza d'ingresso, e la temperatura ambiente sia anch'essa grandezza d'ingresso. Se le due grandezze sono osservate simultaneamente, vi può essere correlazione significativa rivelata dalla covarianza calcolata della frequenza dell'oscillatore e della temperatura ambiente.

Riferimenti

UNI CEI ENV 13005 “Guida all’espressione dell’incertezza di misura”, 31/7/2000.

ENV 13005 “Guide to the expression of uncertainty in measurement”, 1999.