

Esercitazione 5 - Stima dello spettro di potenza

Nella scorsa esercitazione abbiamo considerato segnali deterministici e usato la trasformata discreta di Fourier per caratterizzarli nel dominio della frequenza. Un'altra classe di segnali, osservata nei fenomeni fisici è la classe dei segnali aleatori o processi stocastici. Questi segnali hanno un'intrinseca struttura statistica. Per segnali aleatori stazionari è possibile definire la densità spettrale di potenza. Essa è definita come il limite del valore atteso della trasformata di Fourier al quadrato per la lunghezza del segnale che tende a infinito:

$$S(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-j\omega n} \right|^2 \right]$$

ed equivale alla trasformata di Fourier della sequenza di autocorrelazione (*Teorema di Wiener-Khintchine*):

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] e^{-j\omega m}$$

Vedremo due approcci pratici alla stima dello spettro di potenza. Uno basato sul calcolo di una media della DFT al quadrato, l'altro sulla DFT della sequenza di autocorrelazione.

Metodo di Welch

Il metodo di Welch consiste nel calcolare le DFT (eventualmente finestrate) di successivi segmenti del segnale parzialmente sovrapposti e nel farne poi la media statistica:

Se la sequenza $x[n]$ è divisa in K segmenti, ciascuno di lunghezza L , con S il numero di campioni tra un segmento ed il successivo:

$$x^{(p)}[n] = w[n] \cdot x[n + pS]$$
$$I_{xx}^{(p)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{LU} \left| S^{(p)}(e^{j\omega}) \right|^2,$$

dove $S^{(p)}(e^{j\omega})$ è la DFT del p -esimo segmento

La stima di Welch si ottiene da:

$$I_{xx}^W = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} I_{xx}^{(p)}(e^{j\omega}).$$

La costante U è un fattore di normalizzazione per rimuovere il contributo dovuto alla potenza della finestra:

$$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |w[n]|^2.$$

Provare ad implementare il metodo di Welch:

```
function sp=pwelch(x,M,overlap)
```

Metodo di Blackman-Tukey

Nel metodo precedente abbiamo calcolato la stima dello spettro di potenza direttamente dalla trasformata di Fourier. Un altro approccio alla stima dello spettro di potenza è di stimare prima la sequenza di autocorrelazione, e poi trasformarla usando la trasformata di Fourier.

La sequenza di autocorrelazione si ottiene da:

$$r_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x^*[n]x[n+m], \quad |m| < Q-1$$

La stima di Blackman-Tukey è definita come:

$$I_{xx}^{BT} = \sum_{k=-(R-1)}^{R-1} r_{xx}[k]w[k]e^{-j\omega k}.$$

Provare ad implementare il metodo di Blackman-Tukey:

```
function sp=pBlackmanTukey(x,M,K)
```

1)

```
function sp=mypwelch(x,M,overlap)

sp=0;
k=fix((length(x)-M*overlap)/((1-overlap)*M));
w=boxcar(M);
N=fix(M*(k*(1-overlap)+overlap));

for i=1:k,
    sp=sp+abs(fft(x((i-1)*(1-overlap)*M+1:(i-1)*(1-
        overlap)*M+M).*w')).^2;
end

sp=sp(1:M/2+1)/(k*M);
```

2)

```
function sp=pBlackmanTukey(x,M,K)
sp=0;
for i=1:K,
    autocorr=xcorr(x(1+(i-1)*M:i*M),x(1+(i-1)*M:i*M));
    autocorr(length(autocorr)+1)=0;
    for j=1:M,
        fin(j)=(j-1)/M;
        fin(2*M-j)=(j-1)/M;
    end
    fin(2*M)=0;
    autocorr=autocorr.*fin;
    sp=sp+abs(fft(autocorr));
end
sp=sp/(K*M);
```